数理解析研究所講究録
153巻 1972年 248-255

連立非線型方程式の数値解法概観

京都産業大学 戸川隼人

連立の非線型方程式は、かなり解きにくいものとされているが、解かれている例はかなりあり、解法も数多く考案されている。後記の文献リストはその一部である。

一般的な解法としては、従来はニュートン法と最急降下法が主流であったが、* 最近は共役勾配法の系統の解法[2]～[8]が注目されている。それに関連して解法の体系化も試みられた。Ortega + Rheinboldt [1] はその結果をよくまとめてあり、文献リストもよく整備されている。

実用面では、近年、回路解析の方面で大次元の(数十ないし数百元)の問題が日常的に扱われており、計算時間の短縮が要望されている。しかし応用分野によっては必ずしも大次元の問題ばかりではなく、たとえば次頁の上段の表に示したような問題を個々の特殊性を活かして効率よく解くことが望まれる。

注*) [26], [27]

―― 一般的なタイトル ――	―― 代表的な例 ――
① 連立低次方程式	連立2次方程式
② 次元の少ない問題	2元連立方程式
③ 線型項主導型	非線型項の係数小
④ 大部分の式が線型	非線型の式は1個だけ
⑤ スパース・ヤコビアン	3項方程式

応用上重要な「特別な場合」

上記のは、いずれも相当に強い条件であるが、もっと弱い条件としては、連立代数方程式、あるいは「i番目の方程式 f_i は x_i に関し陽的に解ける」というような条件を付けても良いと思う。ヤコビアン $(\partial f_i / \partial x_j)$ を数式の形で簡単に求められるか否か、という条件はアルゴリズムを考える上で重要である。

次に解法を系統別に分類することを試みる。以下は私案。

消去法	単純な代数的処理 終結式法 (method of resultant)
近似的線型方程式の反復	ニュートン法 セカント法(多点法) 準ニュートン法
極値探索問題に変換して解く	数値微分による方法 式の微分による方法

逐次代入法とかGauß-Seidel-like methodなどは、2番目の項目に含めてもよく、別に1項目設けてもよいと思う。パラメータ・ヴァリエーションというのも1項目設けてもよいが、筋からいうと2番目の中に入れるのが良さそうである。

なお、以上のほかに、連立代数方程式に関しては、1変数の代数方程式の解法のうちで多変数用に拡張できるものが無いかどうか、検討してみる必要がある。

*　*　*

特別な場合の解法の例

低次元代数方程式	終結式法
大部分の式が線型	線型部分は消去法で解く
スパース・ヤコビアン	Schubertの方法[2]
関数の形が複雑	準ニュートン法
対角線型優位	Gauß-Seidel

*　*　*

今後の課題

- ☆ ニュートン系の(公式の)計算のための線型方程式の高速解法
- ☆ 非線型用SOR
- ☆ 汎用プログラムのためのデータの(式の)表現
- ☆ スパース・ヤコビアンのもっとうまい解法
- ★ グローバルな解法

文　献

[1] J.M. Ortega + W.C. Rheinboldt :
Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press 1970

[2] L.K. Schubert :
Modification of a Quasi-Newton Method for Nonlinear Equations with a Sparse Jacobian
Math. Comp. 24 ('70) 27-30

[3] C.G. Broyden :
A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations,
Math. Comp. 19 ('65) 577-593

[4] E.M. Rosen :
A Review of Quasi-Newton methods in Nonlinear Equation Solving and Unconstrained Optimization
Proc. ACM. Nat. Meeting 1966 37-41

[5] C.G.Broyden
A New Method of Solving Nonlinear Simultaneous Equations.
Comput. J. 12 ('69) 94-99

[6] C. G. Broyden:
The Convergence of an Algorithm for Solving Sparse Nonlinear Systems.
Math. Comp. 25 ('71) 285-291

[7] J. E. Dennis, Jr.:
On the Convergence of Broyden's Method for Nonlinear Systems of Equations.
Math. Comp. 25 ('71) 559-567

[8] C. G. Broyden:, Math. Comp. 24 ('70) 365.

[9] D. B. Dulley and M. L. V. Pitteway
ALGORITHM 314. Finding a Solution of N Functional Equations in N Unknowns.
CACM 10 ('67) 726

[10] S. M. Robinson:
Interpolation Solution of Systems of Nonlinear Equations,
J. SIAM 3 ('66) 650-658

[11] J. G. P. Barnes:
An Algorithm for Solving Nonlinear Equations Based on the Secant Method
Comput. J. 8 ('65) 66-72

[12] F. J. Zeleznik : Quasi-Newton Methods for Nonlinear Equations

JACM 15 ('68) 265-271

[13] K. M. Brown

ALGORITHM 316, Solution of Simultaneous Nonlinear Equations. CACM ('67) 728-729

[14] T. A. Porsching :

Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Nonlinear Network Problems.

J. SIAM, NA6 ('69) 437-448

—— これの Ref. には Nonlinear Network の関係で発表された文献リストがあり有益

[15] V. A. Matveev :

Method for the Approximate Solution of a System of Nonlinear Equations.

Zh. Vych. Mat. 4 ('64) 983-994

[16] A. N. Gleyzal :

Solution of Non-linear Equations.

Q. Appl. Math. 17 ('59)

改良セカント法

[17] S. Schechter:
Iteration Methods for Nonlinear Problems
Trans. AMS 104 ('62) 179~188

[18] R.P. Rich + H. Shaw:
A Method for Finding All the Zeros of f(z)
JACM 10 ('63) 545~549

[19] T. Tsuda + T. Kiyono:
Application of the Monte Carlo Method to Systems of Nonlinear Algebraic Equations
NM 6 ('64) 59 – 67

[20] F.H. Deist and L. Sefor:
Solution of Systems of Non-linear Equations by Parameter Variation
CJ 10 ('67) 78~82

[21] M.N. Yakovlev
Solution of Systems of Nonlinear Equations by the Method of Differentiation with respect to a Parameter
NASA TT (1965, F-254)

[22] L. H. Williams

Algebra of Polynomials in Several Variables for a Digital Computer

JACM ? 29 ~ 40

[23] P. H. Blundell :

A Method for Solving Simultaneous Polynomial Equations.

Proc. IFIP 1962. 39-42

[24] W. M. Kincaid

A two-point Method for the Numerical Solution of Systems of Simultaneous Equations

QAM 18 313 ~ 324

[25] B. T. Fang :

Newton's Method and Steepest Ascent

IEEE Trans. AC-12 ('67) 203

[26] A. M. Ostrowski :

Solution of Equations and Systems of Equations

Academic Press (1966)

[27] J. F. Traub

Iterative Methods for the Solution of Equations

Prentice-Hall (1964)